

QC-1
K-156
C-653

✓
II
I

СОБРАНИЕ

ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ

СЕКЦІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

ОБЩЕСТВА ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

при

ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ТОМЪ 6-Й.

ЗАСѢДАНІЯ LXX—LXXVIII.

(СЪ СЕНТЯБРЯ 1887 ПО МАЙ 1888 Г.).



КАЗАНЬ.

**Типографія Императорскаго Университета.
1888.**



СОБРАНИЕ ПРОТОКЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ

СЕКЦИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

ОБЩЕСТВА ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

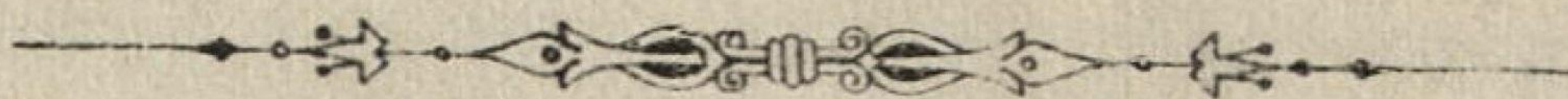
при

ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ТОМЪ 6-Й.

ЗАСѢДАНІЯ LXX—LXXVIII.

(СЪ СЕНТЯБРЯ 1887 ПО МАЙ 1888 Г.).



КАЗАНЬ.
Типографія Императорскаго Университета.
1888.





QC

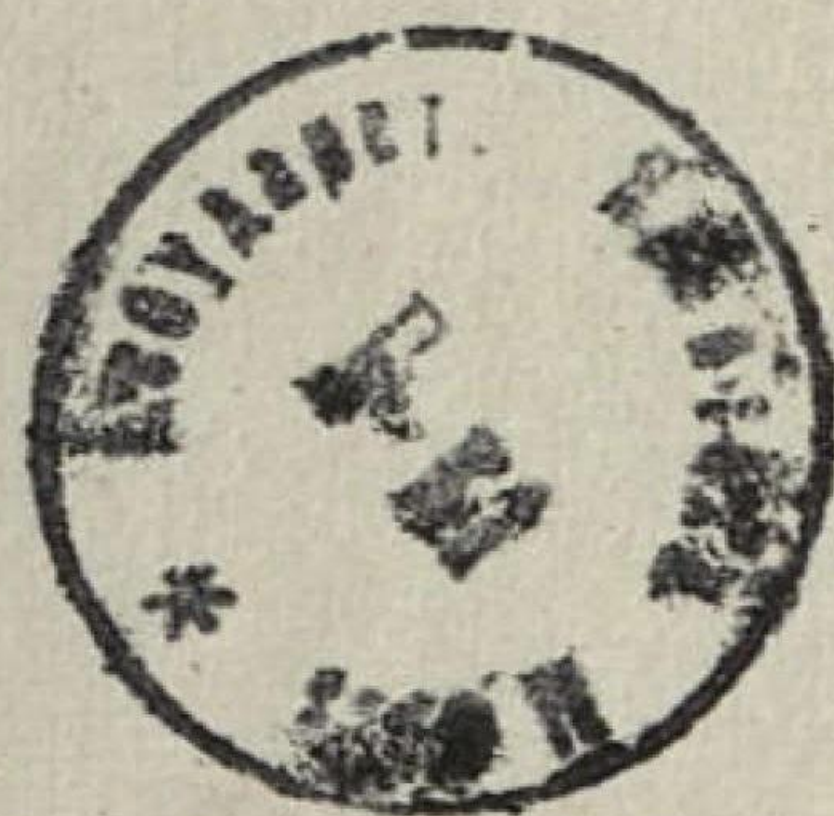
1

K-156

C-652

Печатано по опредѣленію Общества Естествоиспытателей при
Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Президентъ Общества А. Штукенбергъ.



34-600/34

7

Содержаніе 6-го тома.

	Стр.
А) <i>Списокъ членовъ секціи въ июнь 1888 г.</i> . . .	VII—XVI
В) <i>Протоколы:</i>	
70-го засѣданія (26 сентября 1887 г.) . . .	1—6
71-го — (24 октября 1887 г.) . . .	6—7
72-го — (27 ноября 1887 г.) . . .	7—9
73-го — (6 февраля 1887 г.) . . .	145—146
74-го — (27 февраля 1888 г.) . . .	146—147
75-го — (26 марта 1888 г.) . . .	301—302
76-го — (17 апрѣля 1888 г.) . . .	302—303
77-го — (1 мая 1888 г.) . . .	303—304
78-го — (28 мая 1888 г.) . . .	304—306
С) <i>Отчетъ секціи за 8-ой (1887/8) годъ</i> . . .	325—329
Д) <i>Сообщенія, помѣщенныя въ приложеніяхъ къ протоколамъ:</i>	
1) П. В. Преображенскаго — „Особаго вида тригонометрическіе ряды“	10—13
2) И. С. Громеки — „О безконечныхъ значеніяхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка“	14—40
3) Н. П. Слугинова — „О соотношеніи между плотностью, теплоемкостью и атомнымъ вѣсомъ химическихъ элементовъ“	41—51
4) П. С. Портыкаго — „Къ ученію о простыхъ числахъ“	52—140
Оглавленіе къ этой статьѣ	140—142

5) <i>Г. А. Клейбера</i> — „Теорія сглаживанія рядовъ наблюденій“	Стр. 148—239
(Приложеніе къ этой статьѣ—въ концѣ тома).	
6) <i>А. К. Жбиковскаго</i> — „По поводу теоремы Коши“	240—244
7) <i>Д. И. Дубяго</i> — отчетъ объ экспедиціи .	245—263
8) <i>П. С. Портыкаго</i> — отчетъ объ экспедиціи.	264—271
9) <i>А. М. Ковальскаго</i> — отчетъ объ экспедиціи	272—278
10) <i>Н. П. Слугинова</i> — отчетъ объ экспедиціи.	279—300
11) <i>И. П. Долбни</i> — „Новое доказательство теоремы Абеля“	307—324
12—13) <i>П. С. Портыкаго</i> — „Двѣ замѣтки: а) по поводу одного сообщенія П. В. Преображенскаго и б) по поводу диссертациі г. Цераскаго“	330—339
Е) Сообщенія, прореферированныя въ протоколахъ:	
1) <i>А. А. Штукенберга</i> — объ аэролитѣ 18-го августа 1887 г.	3—4
2—3) <i>В. П. Якимова</i> — объ одномъ недостаткѣ учебниковъ алгебры и объ алгебраическомъ задачникѣ г. Минина и др.	4—5
4) <i>А. К. Жбиковскаго</i> — о механическомъ смыслѣ комплексныхъ чиселъ	6
5) <i>В. В. Преображенскаго</i> — о курсѣ Ариметики г. Адамантова	1
6) <i>П. В. Преображенскаго</i> — поправка одной формулы, приводимой Бертраномъ	7
7) <i>А. П. Павлова</i> — объ извлеченіи квадратныхъ корней.	8
8—9) <i>П. И. Свѣшникова</i> — объ опредѣленіи фокуса призмы и объ изображеніяхъ въ плоскихъ зеркалахъ	8—9

10) А. П. Павлова — объ извлеченіи кубич. корней.	Стр. 146
11) Н. П. Слугинова — о количествѣ тепла, выдѣляемаго токомъ въ вольтовой дугѣ.	301—302
12) М. М. Фролова — о волшебныхъ звѣздахъ.	305
F) Прочія сообщенія, читанныя въ засѣданіи секціи:	
1) Н. Е. Янишевскаго — объ аэролитѣ 18 авг. 1887 г.	3
2) П. И. Свѣшниковъ — о каустическихъ кривыхъ	6
3) И. А. Износкова — о преобразованіи крат- ныхъ интеграловъ	7
4—5) М. В. Постникова — о кривыхъ 4-го по- рядка и о площадяхъ, ими ограниченныхъ	145
6) Г. Н. Шебуева — о потенциальной энер- гіи взаимодѣйствія двухъ магнитовъ.	146
7) П. С. Портыкаго — о распознаваніи прос- тыхъ чиселъ.	146
8) И. С. Громеки — о вліяніи температуры на колебанія воздушныхъ массъ	301
9) П. С. Портыкаго — о распознаваніи прос- тыхъ чиселъ.	301
10) Г. Н. Шебуева — къ теоріи бифиляра	303
11) М. И. Лопаткина — о розовыхъ сумер- кахъ	304
12) А. М. Ковальскаго — о географическомъ положеніи Казанской обсерваторіи	304
13) Д. И. Дубяго — о фотографіи, какъ но- вомъ орудіи астрономическихъ изслѣдованій	304
14) Н. П. Казанкина — о новѣйшихъ изслѣ- дованіяхъ по электрооптикѣ	304

15) <i>Г. А. Клейбера</i> —о примѣненіи способа сглаживанія къ механич. квадратурамъ.	Стр. 305
16) <i>И. П. Долбни</i> —о безконечныхъ непре- ныхъ дробяхъ	305
Г) <i>Текущая дѣла секціи:</i>	
1) Баллотированіе новыхъ членовъ 1, 145, 304 и 305	
2) Заявленіе метеорологической комиссіи.	2—3
3) Демонстрированіе А. А. Штукенбергомъ аэролита 18 авг. 1887 г.	3
4) Денежный отчетъ экспедиціи Н. П. Слуги- нова	4
5) О заказѣ портрета П. И. Котельникова	6
6) Замѣчаніе В. В. Преображенскаго по пово- ду сообщенія А. К. Жбиковскаго	7
7) Замѣчаніе А. В. Васильева по поводу сооб- щенія П. В. Преображенскаго	7—8
8) Демонстрированіе Н. П. Слугиновымъ и К. В. Кебелемъ диффракціоннаго спектра	146
9) Демонстрированіе Н. Е. Янишевскимъ и Н. П. Казанкинымъ новыхъ физическихъ приборовъ	147
10) Демонстрированіе Н. П. Слугиновымъ фи- зическихъ приборовъ.	302
11) Замѣчаніе А. В. Васильева по поводу сооб- щенія А. К. Жбиковскаго	303
12) Привѣтствіе, сказанное А. В. Васильевымъ по случаю юбилея Казанской астроном. обсерваторіи.	304
13) О поздравит. телеграммѣ В. Я. Буняковскому.	305
14) Письмо Д. И. Дубяго къ предсѣдателю секціи.	305
15) Учрежденіе должности бібліотекаря секціи.	306
16) Выборы въ администрацію и комитетъ секціи на 9-й годъ	306

СПИСОКЪ ЧЛЕНОВЪ

СЕКЦІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ

въ іюнѣ 1888 г.

- 1) *Адамантовъ*, Дмитрій Леонтьевичъ, учитель 3-й гимназіи въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 2) *Адріановъ*, Василій Васильевичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж.-Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).
- 3) *Александровъ*, Александръ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 11 октября 1880 г.).
- 4) *Андреевъ*, Михаилъ Кирилловичъ, учитель реального учил. въ Самарѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 5) *Ардашевъ*, Александръ Александровичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 25 октября 1886 г.).
- 6) *Аристовъ*, Иванъ Николаевичъ, губернской земскій гласный въ Казани (съ 17 января 1887 г.).
- 7) *Багаевъ*, Алексѣй Антоновичъ, военный инженеръ въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 8) *Бобровниковъ*, Николай Алексѣевичъ, учитель иностранческой учител. семинар. въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 9) *Бобынинъ*, Викторъ Викторовичъ, приватъ-доцентъ университета въ Москвѣ (съ 28 сентября 1885 г.).
- 10) *Богородицкій*, Василій Алексѣевичъ, приватъ-доцентъ университета въ Казани (съ 14 мая 1883 г.).

VIII

- 11) *Большагаринскій*, Владиміръ Константиновичъ, учитель реального училища въ Выборгѣ (съ 29 сент. 1884 г.).
- 12) *Бравинъ*, Николай Александровичъ, учитель гимназіи въ Уфѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 13) *Васильевъ*, Александръ Васильевичъ, профес. университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 14) *Вальтеръ*, Адамъ Яковлевичъ, учитель гимназіи въ Астрахани (съ 30 сент. 1886 г.).
- 15) *Веретенниковъ*, Дмитрій Дмитриевичъ, секретарь совета университета въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 16) *Веретенниковъ*, Владиміръ Ивановичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).
- 17) *Вильковискій*, Эммануиль Яковлевичъ, учитель женской гимназіи въ Казани (съ 24 сентября 1883 г.).
- 18) *Виноградскій*, Владиміръ Николаевичъ, директоръ реал. училища въ Астрахани (съ 24 сентября 1883 г.).
- 19) *Витковскій*, Василій Васильевичъ, офицеръ-геодезистъ въ С.-Петербургѣ (съ 29 октября 1883 г.).
- 20) *Вишневскій*, Гурій Матвѣевичъ, учитель учительской семинаріи въ Самарѣ (съ 29 сентября 1884 г.).
- 21) *Волковъ*, Михаилъ Сергѣевичъ, учитель 2-го реального училища въ С.-Петербургѣ (съ 28 сент. 1885 г.).
- 22) *Галузевскій*, Иванъ Ивановичъ, кандидатъ математики въ Полтавѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 23) *Генкель*, Августъ Августовичъ, директоръ реального училища въ Сарапулѣ (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 24) *Голубевъ*, Петръ Александровичъ, учитель математики въ Томскѣ (съ 17 мая 1880 г.).
- 25) *Горталовъ*, Александръ Петровичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 26) *Громека*, Ипполитъ Степановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

27) *Дмитрієвскій*, Михайлъ Михайловичъ, директоръ реалън. училища въ Перми (съ 15 апрѣля 1880 г.).

28) *Долбня*, Иванъ Петровичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж.-Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).

29) *Домовъ*, Алексѣй Ѳедоровичъ, кандидатъ математ. наукъ (съ 13 апр. 1885 г.).

30) *Дубяго*, Дмитрій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 29 окт. 1883 г.).

31) *Жбиковскій*, Антонъ Ксаверьевичъ, учитель 1-й гимназіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

32) *Жилевичъ*, Антонъ Флоріановичъ, учитель реального училища въ Перми (съ 26 сентября 1887 г.).

33) *Жуковскій*, Николай Егоровичъ, профессоръ университета въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

34) *Заибаловъ*, Борисъ Павловичъ, непремѣн. членъ присутств. по крестьян. дѣламъ въ Цивильскѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).

35) *Залезскій*, Владиміръ Андреевичъ, учитель реального училища въ Сарапулѣ (съ 24 октября 1883 г.).

36) *Здзярскій*, Антонъ Феликсовичъ, инженеръ путей сообщенія въ С. Петербургѣ (съ 28 сент. 1885 г.).

37) *Зелинскій*, Иванъ Ивановичъ, учитель 2-й гимназіи въ Казани (съ 26 октября 1885 г.).

38) *Фонъ-Зиленъ-Корнъ*, Михайлъ Ксаверьевичъ, военный инженеръ въ Ташкентѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).

39) *Износковъ*, Иліодоръ Александровичъ, директоръ народн. училищъ Казанской губерніи (съ 26 апрѣля 1882 г.).

40) *Имшенникъ*, Іосифъ Антоновичъ, директоръ 2-й гимназіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

41) *Ицисонъ*, Карлъ, редакторъ „Математ. Библіотеки“ въ Берлинѣ (съ 28 сент. 1885 г.).

- 42) *Кадыжъ*, Петръ Христофоровичъ, учитель гимназіи въ Томскѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 43) *Казаковъ*, Василій Владиміровичъ, учитель женской гимназіи въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 44) *Казанкинъ*, Николай Петровичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 25 окт. 1886 г.).
- 45) *Канонниковъ*, Иннокентій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 46) *Кебель*, Карлъ Веніаминовичъ, лаборантъ физич. кабинета университета въ Казани (съ 21 октября 1882 г.).
- 47) *Кирѣевъ*, Василій Ивановичъ, инспекторъ гимназіи въ Царицинѣ (съ 20 сентября 1880 г.).
- 48) *Клейбергъ*, Іосифъ Андреевичъ, приватъ-доцентъ университета въ С.-Петербургѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 49) *Ковальскій*, Александръ Маріановичъ, ассистентъ при обсерваторіи университета въ Казани (съ 25 сентября 1882 г.).
- 50) *Колли*, Робертъ Андреевичъ, профессоръ Петровской Академіи въ Москвѣ (съ 4 апрѣля 1881 г.).
- 51) *Корнухъ-Троицкій*, Яковъ Петровичъ, учитель 1-й гимназіи въ Казани (съ 26 сентября 1887 г.).
- 52) *Котеловъ*, Константинъ Ивановичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).
- 53) *Котельникова*, Елизавета Петровна, учительница женской ксеніинской гимназіи въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 54) *Красновъ*, Иванъ Константиновичъ, чиновникъ вѣдомства финансовъ въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).
- 55) *Кривошеинъ*, Филиппъ Васильевичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 56) *Кривцовъ*, Яковъ Васильевичъ, архитекторъ въ Рязани (съ 24 сянтября 1883 г.).

- 57) *Кузнецкій*, Николай Васильевичъ, учитель сельско-хозяйствен. училища на фермѣ близъ Казани (съ 20 сентября 1880 г.).
- 58) *Ленсъ*, Иванъ Андреевичъ, инспекторъ реального училища въ Казани (съ 13 апр. 1885 г.).
- 59) *Ливенъ*, Эмилій Павловичъ, помощникъ инспектора кадетскаго корпуса въ Ниж. Новгородѣ (съ 28 мая 1887 г.).
- 60) *Линдеманъ*, Эдуардъ Эдуардовичъ, ученый секретарь обсерваторіи въ Пулково (съ 24 сентября 1883 г.).
- 61) *Лишевъ*, Викторъ Александровичъ, артиллерійскій офицеръ въ Казани (съ 11 октября 1880 г.).
- 62) *Лобовиковъ*, Георгій Ивановичъ, учитель гимназіи въ Вязьмѣ (съ 29 сент. 1884 г.).
- 63) *Ломоносовъ*, Петръ Федоровичъ, учитель математики (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 64) *Лопаткинъ*, Михаилъ Ивановичъ, наблюдатель метеоролог. обсерваторіи университета въ Казани (съ 22 нояб. 1886 г.).
- 65) *Лукницкій*, Всеволодъ Всеволодовичъ, артиллерійскій офицеръ въ Казани (съ 11 октября 1880 г.).
- 66) *Максимовичъ*, Владиміръ Павловичъ, профессоръ университета въ Кіевѣ (съ 26 сентября 1881 г.).
- 67) *Максимовичъ*, Сергѣй Павловичъ, инженеръ путей сообщенія въ С.-Петербурѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 68) *Максимовъ*, Николай Андреевичъ, учитель татарской учительской школы въ Казани (съ 29 октября 1883 г.).
- 69) *Малешевскій*, Болеславъ Оомичъ, главный контролеръ юго-запад. жел. дорогъ въ С.-Петербурѣ (съ 6 февр. 1888 г.).
- 70) *Мальцевъ*, Михаилъ Михайловичъ, учитель учительскаго института въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).

- 71) *Мальцевъ*, Александръ Михайловичъ, учитель гимназіи въ Царицинѣ (съ 29 октября 1883 г.).
- 72) *Мещерскій*, Иванъ Всеволодовичъ, консерваторъ кабинета практич. механики въ С.-Петербур. университетѣ (съ 28 мая 1888 г.).
- 73) *Милославская*, Александра Ивановна, учительн. женской прогимназіи въ Глазовѣ (съ 28 апрѣля 1884 г.).
- 74) *Мининъ*, Александръ Петровичъ, преподаватель 2-й женской гимназіи въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 75) *Мининъ*, Викторъ Петровичъ, преподаватель 3-й мужской гимназіи въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 76) *Михайловъ*, Петръ Александровичъ, учитель реальн. училища въ Елабугѣ (съ 21 октября 1882 г.).
- 77) *Мокроусовъ*, Василій Семеновичъ, кандидатъ математики (съ 20 декабря 1886 г.).
- 78) *Неклюдовъ*, Сергѣй Михайловичъ, членъ Совѣта дворянскаго банка въ С.-Петербургѣ (съ 25 окт. 1886 г.).
- 79) *Некрасовъ*, Владиміръ Леонидовичъ, бомбардиръ, кандидатъ математики въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).
- 80) *Нечаевъ*, Николай Владиміровичъ, учитель 1-й гимназіи въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).
- 81) *Никоновъ*, Петръ Павловичъ, учитель женской гимназіи въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 82) *Обуховъ*, Дмитрій Григорьевичъ, учитель реальнаго училища въ Вяткѣ (съ 26 сѣнтября 1887 г.).
- 83) *Орловъ*, Александръ Петровичъ, директоръ реал. училища въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 84) *Орловъ*, Сергѣй Павловичъ, лекторъ англ. яз. при университетѣ въ Казани (съ 26 ноября 1883 г.).
- 85) *Охотниковъ*, Никифоръ Михайловичъ, учитель чувашскаго училища въ Симбирскѣ (съ 23 нояб. 1885 г.).

XIII

86) *Павленко*, Варлаамъ Павловичъ, учитель 2-го кадетскаго корпуса въ С.-Петербургѣ (съ 29 сент. 1884 г.).

87) *Павловъ*, Александръ Петровичъ, учитель женской гимназіи въ Екатеринбургѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

88) *Пактовскій*, Иванъ Гавриловичъ, учитель учительской семинаріи въ Бирскѣ (съ 11 декабря 1882 г.).

89) *Пантелѣевскій*, Александръ Никитичъ, инспекторъ реал. училища въ Вяткѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).

90) *Пермяковъ*, Сергѣй Ефремовичъ, кандидатъ математ. наукъ (съ 29 сент. 1884 г.).

91) *Перуанскій*, Александръ Аѳанасіевичъ, учитель реального училища въ Астрахани (съ 18 апрѣля 1887 г.).

92) *Перцовъ*, Петръ Петровичъ, уѣздный предводитель дворянства въ Казани (съ 1 мая 1888 г.).

93) *Покровскій*, Александръ Николаевичъ, учитель гимназіи въ Костромѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

94) *Покровскій*, Василій Васильевичъ, учитель Введенской гимназіи въ С.-Петербургѣ (съ 28 мая 1888 г.).

95) *Полетика*, Петръ Романовичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 30 сент. 1886 г.).

96) *Пономаревъ*, Дмитрій Григорьевичъ, учитель женской гимназіи въ Самарѣ (съ 29 сентября 1884 г.).

97) *Порфирьевъ*, Николай Ивановичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 30 сент. 1886 г.).

98) *Портыкій*, Платонъ Сергѣевичъ, астрономъ-наблюдатель университета въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).

99) *Постниковъ*, Модестъ Васильевичъ, учитель гимназіи въ Астрахани (съ 23 ноября 1885 г.).

100) *Потановъ*, Николай Гавриловичъ, помощникъ попечителя Казанскаго учебнаго округа (съ 27 апр. 1885 г.).

101) *Преображенскій*, Владиміръ Васильевичъ, профессоръ (съ 27 окт. 1884 г.).

- 102) *Преображенскій*, Петръ Васильевичъ, учитель 4-ой гимназіи въ Москвѣ (съ 28 сент. 1885 г.).
- 103) *Пушковъ*, Николай Михайловичъ, учитель прогимназіи въ Алатырѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 104) *Ренчицкій*, Степанъ Дмитріевичъ, директоръ реального училища въ станицѣ урюпинской, въ землѣ войска донскаго (съ 6 февр. 1888 г.).
- 105) *Рейнгардтъ*, Николай Викторовичъ, присяжн. повѣреный въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).
- 106) *Рожанскій*, Василій Михайловичъ, учитель ино-родческой учит. семинаріи въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 107) *Россевицъ*, Юлій Николаевичъ, артиллерійскій офицеръ въ С.-Петербургѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).
- 108) *Рѣшетинъ*, Николай Лаврентьевичъ, военный инженеръ (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 109) *Рябининъ*, Петръ Николаевичъ, учитель реальн. училища въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 110) *Салинъ*, Генрихъ Андреевичъ, учитель 3-й гимназіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 111) *Свѣнцицкій*, Михаилъ Іосифовичъ, податной инспекторъ въ Казани (съ 26 окт. 1885 г.).
- 112) *Свѣшниковъ*, Павелъ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Троицкѣ, Оренб. губ. (съ 26 сентября 1887 г.).
- 113) *Сегель*, Михаилъ Соломоновичъ, кандидатъ матем. наукъ въ Казани (съ 25 сентября 1880 г.).
- 114) *Сергѣевъ*, Михаилъ Порфирьевичъ, кандидатъ математики (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 115) *Сластниковъ*, Семенъ Ивановичъ, кандидатъ математики въ Казани (съ 20 сентября 1880 г.).
- 116) *Слушиновъ*, Николай Петровичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 25 окт. 1886 г.).

- 117) *Смирновъ*, *Антонинъ Андреевичъ*, учитель гимназіи въ Самарѣ (съ 25 окт. 1886 г.).
- 118) *Смирновъ*, *Евгеній Александровичъ*, кандидатъ математ. наукъ, въ Иркутскѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).
- 119) *Соловьевъ*, *Аркадій Матвѣевичъ*, учитель реал. училища въ Вольскѣ (съ 17 мая 1880 г.).
- 120) *Старковъ*, *Алексѣй Петровичъ*, въ Одессѣ (съ 29 сент. 1884 г.).
- 121) *Стефановичъ*, *Яковъ Аполлоновичъ*, учитель учительскаго института въ Казани (съ 26 апрѣля 1882 г.).
- 122) *Стрекаловъ*, *Викторъ Николаевичъ*, учитель 2-го кадетск. корпуса въ С.-Петербурѣ (съ 23 нояб. 1885 г.).
- 123) *Суворовъ*, *Федоръ Матвѣевичъ*, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 124) *Толмачевъ*, *Николай Александровичъ*, профессоръ университета въ Казани (съ 26 сентября 1887 г.).
- 125) *Фалинъ*, *Федоръ Николаевичъ*, военный инженеръ въ Нижнемъ-Новгородѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 126) *Федоровъ*, *Евгеній Степановичъ*, военный инженеръ въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 127) *Флавицкій*, *Флавіамъ Михайловичъ*, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 128) *Фроловъ*, *Михаилъ Михеевичъ*, инженеръ-генералъ въ С.-Петербурѣ (съ 26 апр. 1886 г.).
- 129) *Халтулари*, *Викторъ Константиновичъ*, инспекторъ кадетскаго корпуса въ Ниж. Новгородѣ (съ 28 мая 1888 г.).
- 130) *Хижняковъ*, *Михаилъ Прокофьевичъ*, учитель гимназіи въ Самарѣ (съ 13 декабря 1880 г.).
- 131) *Хохряковъ*, *Яковъ Андреевичъ*, учитель реального училища въ Сарапулѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 132) *Цомакіонъ*, *Анна Ивановна*, учительница математики (съ 17 февраля 1883 г.).

133) *Чилирь*, Генрихъ Игнатъевичъ, учитель маріинской гимназіи въ Казани (съ 25 сент. 1882 г.).

134) *Шанторинъ*, Василій Григорьевичъ, инспекторъ гимназіи въ Екатеринодарѣ (съ 4 апрѣля 1880 г.).

135) *Шебуевъ*, Георгій Николаевичъ, учитель реальн. училища въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

136) *Ширковъ*, Алексѣй Петровичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж. Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).

137) *Ширяевъ*, Владиміръ Александровичъ, губерн. землемѣръ въ Казани (съ 25 февраля 1884 г.).

138) *Шнейдеръ*, Яковъ Григорьевичъ, ветеринарный врачъ (съ 17 мая 1880 г.).

139) *Шулинскій*, Александръ Михайловичъ, учитель учительской семинаріи въ Ташкентѣ (съ 25 сентября 1882 г.).

140) *Эккерманъ*, Александръ Христіановичъ, учит. маріинской женской гимназіи въ Казани (съ 17 февраля 1883 г.).

141) *Энгельгардтъ*, Василій Павловичъ, астрономъ въ Дрезденѣ (съ 23 февраля 1885 г.).

142) *Якимовъ*, Владиміръ Петровичъ, учитель гимназіи въ Екатеринбурѣ (съ 30 сент. 1886 г.).

143) *Якобій*, Аркадій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 23 ноября 1885 г.).

144) *Янишевскій*, Ерастъ Петровичъ, профессоръ (съ 17 мая 1880 г.).

145) *Янишевскій*, Николай Ерастовичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 25 окт. 1886 г.).

146) *Федотченко*, Александръ Фёдоровичъ, учитель гимназіи въ Симбирскѣ (съ 13 декабря 1880 г.).

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1873-74

1. The first part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	101-102
2. The second part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	103-104
3. The third part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	105-106
4. The fourth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	107-108
5. The fifth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	109-110
6. The sixth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	111-112
7. The seventh part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	113-114
8. The eighth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	115-116
9. The ninth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	117-118
10. The tenth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	119-120
11. The eleventh part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	121-122
12. The twelfth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	123-124
13. The thirteenth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	125-126
14. The fourteenth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	127-128
15. The fifteenth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	129-130
16. The sixteenth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	131-132
17. The seventeenth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	133-134
18. The eighteenth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	135-136
19. The nineteenth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	137-138
20. The twentieth part of the book is devoted to a general introduction to the subject of the history of the United States.	139-140

2-й выпускъ 6-го тома собранія протоколовъ секціи физико-математическихъ наукъ въ Казани. (Засѣданія 73—74).

Протоколъ 73-го засѣданія

6 февраля 1888 года.

(Въ засѣданіи присутствовали 12 членовъ и 10 постороннихъ лицъ).

I. По предложенію А. В. Васильева, А. Ф. Здзярскаго, В. В. Преображенскаго, П. С. Порѣцкаго и О. М. Суворова, единогласно приняты въ члены секціи:

144) *Красновъ*, Иванъ Константиновичъ, кандидатъ математическихъ наукъ, въ Казани;

145) *Веретенниковъ*, Владиміръ Ивановичъ, кандидатъ математическихъ наукъ, въ Казани;

146) *Некрасовъ*, Владиміръ Леонидовичъ, кандидатъ математическихъ наукъ, въ Казани;

147) *Котеловъ*, Константинъ Ивановичъ, кандидатъ математическихъ наукъ, въ Казани;

148) *Ренчицкій*, Степанъ Дмитріевичъ, директоръ Урюпинскаго реальнаго училища въ землѣ Войска Донскаго;

149) *Малешевскій*, Болеславъ Оомичъ, кандидатъ математическихъ наукъ, главный контролеръ югозападныхъ желѣзныхъ дорогъ въ Петербургѣ.

II. Доложены два сообщенія М. В. Постникова:

а) къ вопросу о кривыхъ 4-го порядка

и б) опредѣленіе площадей, ограниченныхъ кривыми 4-го порядка.

III. Доложено сообщеніе г. Долбни: „Новое доказательство теоремъ, заключающихся въ мемуарѣ Абеля: Sur l'in-

tégration des différentielles $\frac{\varphi dx}{\sqrt{R}}$, φ et R étant des fonctions entières.“ Сообщение это печатается въ приложеніи къ протоколамъ.

IV. Доложено сообщеніе *И. А. Клейбера*: „Теорія слаживанія рядовъ наблюденій“, помѣщаемое въ приложеніи къ выпуску.

Протоколъ 74-го засѣданія

27 февраля 1888 года.

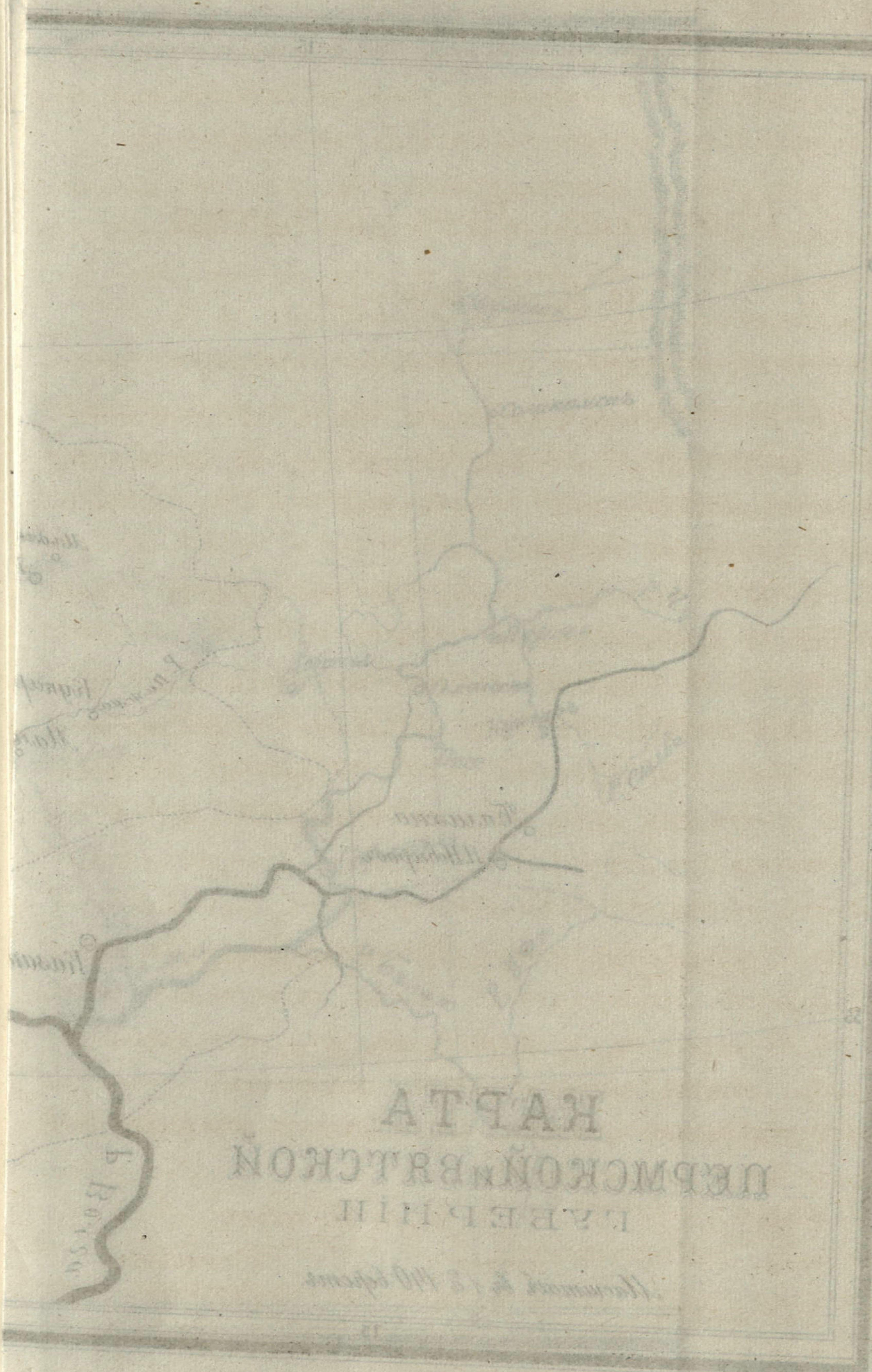
(Въ засѣданіи присутствовали 18 членовъ и около 30 постороннихъ лицъ)

I. *Г. Н. Шебуевъ* сдѣлалъ сообщеніе: „о потенциальной энергіи взаимодѣйствія двухъ магнитовъ“, которое будетъ напечатано въ приложеніи къ протоколамъ.

II. *Ө. М. Суворовъ* изложилъ сообщеніе *А. П. Павлова*: „Элементарный приѣмъ извлеченія кубическихъ корней.“ Этотъ приѣмъ г. Павлова аналогиченъ съ приѣмомъ, даннымъ имъ для извлеченія квадратныхъ корней и опубликованнымъ въ брошюрѣ: „Таблица для упрощеннаго способа извлеченія квадратныхъ корней изъ чиселъ съ помощію русскихъ счетъ или послѣдовательнаго вычитанія. Оренбургъ 1888 г.“

III. *П. С. Портыкій* сдѣлалъ сообщеніе о распознаваніи простыхъ чиселъ.

IV. *Н. П. Слугиновъ* и *К. В. Кебель* демонстрировали на экранѣ диффракціонный спектръ, образованный отражательною рѣшеткою Роланда, недавно полученною физическимъ кабинетомъ университета отъ Брешера въ сѣв. Амери-



II. Предсѣдатель прочелъ сообщеніе *Е. Н. Шебуева*: „къ теоріи бифиляра“.

III. *А. В. Васильевъ* по поводу сдѣланнаго въ засѣданіи 27 Ноября 1887 г. сообщенія *А. К. Жбиковскаго* (см. стр. 240 настоящаго тома) указалъ, что доказательство, сходное по основнымъ мыслямъ съ доказательствомъ г. Жбиковскаго, помѣщено въ 8-омъ томѣ журнала *Acta mathematica* Гольстомъ (*Elling Holst*) въ статьѣ подъ заглавіемъ: „*Be-
weis des Satzes dass eine jede algebraische Gleichung eine
Wurzel hat*“. Наковецъ подобное-же доказательство было дано въ сочиненіи появившемся въ 1828 г.: *La vraie thé-
orie des quantités négatives et des quantités prétendues ima-
ginaires. Dedié aux amis de l'evidence par C. V. Mourey* (второе изданіе появилось въ 1861 г.)⁽¹⁾. Совпадая по основной мысли съ доказательствами *Holst'a* и *Mourey*, доказательство *А. К. Жбиковскаго* выгодно отличается отъ нихъ большею краткостью и наглядностью.

Протоколъ 77-го засѣданія

1 Мая 1888 года.

(Въ засѣданіи присутствовали 27 членовъ и болѣе 100 постороннихъ посѣтителей).

I. Предсѣдатель *А. В. Васильевъ* по поводу исполнившагося пятидесятилѣтія научной дѣятельности Казанской астрономической обсерваторіи обратился къ обсерваторіи отъ имени секціи съ привѣтствіемъ, въ которомъ указалъ на заслуги, принесенныя обсерваторіею наукъ, просвѣщенію мѣ-

⁽¹⁾ См. *Loria*. Sur une démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. (*Acta mathematica* Bd. IX. p. 71).

стнаго края и физико-математической секціи. Въ концѣ прѣ-
ствіи было выражено пожеланіе, чтобы связь между астро-
номическою обсерваторіею и секціею дѣлалась болѣе и болѣе
тѣсною, и высказана надежда, что Казанская Астрономиче-
ская обсерваторія ко дню празднованія столѣтія своей на-
учной дѣятельности будетъ имѣть помѣщеніе, болѣе удален-
ное отъ городского шума.

II. По предложенію А. В. Васильева, I. А. Имшеника
и П. С. Порѣцкаго единогласно приняты въ члены секціи:

150) *Перцевъ*, Петръ Петровичъ, кандидатъ математи-
ческихъ наукъ, предводитель дворянства Казанскаго уѣзда;

151) *Долбня*, Иванъ Петровичъ, преподаватель матема-
тики кадетскаго корпуса въ Нижнемъ Новгородѣ;

152) *Адриановъ*, Василій Васильевичъ, преподаватель
математики кадетскаго корпуса въ Нижнемъ Новгородѣ;

153) *Ширковъ*, Алексѣй Петровичъ, преподаватель мате-
матики кадетскаго корпуса въ Нижнемъ Новгородѣ.

III. *М. И. Лопаткинъ* сдѣлалъ сообщеніе „о розовыхъ
сумеркахъ въ 1883—86 гг“.

IV. *А. М. Ковальскій* сдѣлалъ сообщеніе: „о географиче-
скомъ положеніи Казанской обсерваторіи“.

V. *Д. И. Дубяго* сдѣлалъ сообщеніе „о фотографіи,
какъ о новомъ орудіи астрономическихъ изслѣдованій.“

Протоколъ 78-го засѣданія

28 Мая 1888 г.

(Въ засѣданіи присутствовало 27 членовъ и около 15 постороннихъ посѣ-
тителей).

I. *Н. П. Казанкинъ* сдѣлалъ сообщеніе: „о новѣйшихъ
изслѣдованіяхъ по электрооптикѣ.“

II. *Г. А. Клейберъ* сдѣлалъ сообщеніе: „о примѣненіи способа сглаживанія къ механическимъ квадратурамъ“.

III. *А. В. Васильевъ* доложилъ сообщеніе *И. П. Долбни*: „О безконечныхъ непрерывныхъ дробяхъ“.

IV. *П. С. Порѣцкій* прочелъ то мѣсто изъ письма къ нему *М. М. Фролова*, въ которомъ почтенный авторъ знакомитъ съ результатами своего изысканія по вопросу о расположеніи чиселъ въ фигуры, названныя имъ „волшебными звѣздами“. Напримѣръ, двадцать четыре числа: 1, 2, 3, ..., 24 можно расположить такъ, что получится восьмиугольная звѣзда A B C D E F G H, причемъ на любой изъ прямыхъ AD, AF, BE, BG и прочее окажется по шести чиселъ, дающихъ въ суммѣ число 75.

V. По предложенію *А. В. Васильева*, *И. П. Долбни*, *Д. И. Дубяго*, *П. С. Порѣцкаго* и *Н. П. Слугинова*, единогласно приняты въ члены секціи:

154) *Покровский*, *Василій Васильевичъ*, преподаватель математики и физики въ С.-Петербургской Введенской классической гимназіи;

155) *Мещерскій*, *Иванъ Всеволодовичъ*, консерваторъ кабинета практической механики въ С.Петербургскомъ университетѣ;

156) *Хартулари*, *Викторъ Константиновичъ*, инспекторъ кадетскаго корпуса въ Нижнемъ Новгородѣ;

157) *Ливенъ*, *Эмилій Павловичъ*, помощникъ инспектора кадетскаго корпуса въ Нижнемъ Новгородѣ.

VI. Предсѣдатель сообщилъ о посланной имъ отъ имени секціи въ день шестидесятилѣтія академической дѣятельности *В. Я. Буняковского* поздравительной телеграммѣ маститому юбиляру и о полученной отъ него благодарности.

VII. Предсѣдатель сообщилъ о полученномъ имъ письмѣ отъ *Д. И. Дубяго*, въ которомъ *Дмитрій Ивановичъ* отъ

имени обсерваторіи выражаетъ благодарность секціи за то, что въ день празднованія 50-лѣтняго юбилея обсерваторіи было назначено въ обсерваторской залѣ засѣданіе секціи, а также и за тѣ пожеланія и привѣтствія, которыя были высказаны предсѣдателемъ при открытіи помянутаго засѣданія.

VIII. Прочтенъ и утвержденъ отчетъ секціи за 8-ой годъ ея существованія.

IX. Въ виду расширенія библіотеки секціи постановлено избрать для завѣдыванія ею отдѣльное лицо.

X. Избраны на девятый годъ: предсѣдателемъ секціи А. В. Васильевъ, вице-предсѣдателемъ—Θ. М. Суворовъ, секретаремъ—П. С. Порѣцкій, библіотекаремъ—Н. П. Казанкинъ, членами Комитета—И. С. Громека, Д. И. Дубяго, Н. П. Слугиновъ, А. П. Орловъ, И. А. Износковъ, І. А. Имшеникъ, Е. Н. Шебуевъ.

Предсѣдатель секціи *А. Васильевъ.*

Секретарь секціи *П. Порѣцкій.*

Печатано по опредѣленію Общества Естествоиспытателей при
Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Президентъ Общества *А. Штукенбергъ.*

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЪ АБЕЛЯ, ОТНОСЯЩИХСЯ ДО ИНТЕГРИРОВАНІЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ

вида $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, ϱ и R цѣлыя функціи.

Сообщеніе

И. П. Долбни,

читанное 6 февраля 1888 г. въ 73 засѣданіи физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

§ 1. Вопросъ объ интегрированіи алгебраическихъ ирраціональныхъ дифференціаловъ въ логариѣмахъ впервые поставленъ Абелемъ. Въ мемуарѣ „Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, ϱ et R étant des fonctions entières“

Абель далъ критерій, при помощи котораго можно узнать, выражается ли $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$ въ логариѣмахъ или нѣтъ. Въ томъ случаѣ, когда упомянутый интегралъ выражается въ логариѣмахъ, возможно найти такія двѣ цѣлыя функціи p и q , что будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = A \lg \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}.$$

Изысканіе критерія, при которомъ имѣетъ мѣсто такое равенство, составляетъ предметъ мемуара. Цѣль настоящей статьи заключается въ упрощеніи анализа Абеля, чрезвычай-

но сложнаго, а потому недоступнаго для начинающихъ. Сложность анализа Абеля, по всей вѣроятности, была причиною того, что I. Бертранъ не нашелъ возможнымъ изложить мемуаръ Абеля въ своемъ курсѣ „Traité de calcul intégral“, хотя о критеріѣ Абеля упоминаетъ, придавая ему величайшее значеніе. Для того, чтобы сдѣлать изслѣдованіе знаменитаго геометра вполне удобопонятнымъ и освободить читателя отъ необходимости обращаться къ оригинальному источнику, мы изложимъ рѣшеніе проблемы во всей полнотѣ.

§ 2. Возьмемъ выраженіе

$$(1) \quad z = \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}} \quad (1)$$

Черезъ дифференцированіе находимъ

$$dz = \frac{dp + d(q\sqrt{R})}{p + q\sqrt{R}} - \frac{dp - d(q\sqrt{R})}{p - q\sqrt{R}}, \text{ или}$$

$$dz = \frac{2pd(q\sqrt{R}) - 2dp \cdot q\sqrt{R}}{p^2 - q^2 R}, \text{ или}$$

$$dz = \frac{pq dR + 2(pdq - qdp)R}{(p^2 - q^2 R)\sqrt{R}}.$$

Полагая

$$(2) \quad \begin{aligned} pq \frac{dR}{dx} + 2 \left(p \frac{dq}{dx} - q \frac{dp}{dx} \right) R &= M, \\ p^2 - q^2 R &= N, \end{aligned}$$

получимъ

$$(3) \quad dz = \frac{Mdx}{N\sqrt{R}},$$

отсюда

$$(4) \quad z = \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}} = \int \frac{Mdx}{N\sqrt{R}}.$$

(1) Abel. Oeuvres complètes, T. 1, 1881, p. 104.

§ 3. Дифференцируя уравнение

$$p^2 - q^2 R = N,$$

находимъ

$$dN = 2p dp - 2q dq \cdot R - q^2 dR, \text{ или}$$

$$pdN = 2p^2 dp - 2pq dq \cdot R - pq^2 dR.$$

Замѣчая, что

$$p^2 = N + q^2 R,$$

имѣемъ

$$pdN = 2Ndp - q[2(pdq - qdp)R + pqdR],$$

или

$$pdN = 2Ndp - qMdx, \text{ откуда}$$

$$\frac{M}{N} = \frac{2 \frac{dp}{dx} - p \frac{dN}{Ndx}}{q}.$$

Ограничивая проблему тѣмъ случаемъ, когда $\frac{M}{N}$ есть цѣлая функція q , имѣемъ

$$qO = 2 \frac{dp}{dx} - p \frac{dN}{Ndx}$$

Отсюда слѣдуетъ, что $p \frac{dN}{Ndx}$ есть цѣлая функція x .

Положимъ

$$N = (x+a)^m (x+a_1)^{m_1} \dots (x+a_n)^{m_n}.$$

Имѣемъ

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \dots + \frac{m_n}{x+a_n}.$$

Слѣд. произведение

$$p \left(\frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} + \dots + \frac{m_n}{x+a_n} \right)$$

есть цѣлая функція, а потому

$$p = (x+a)(x+a_1)\dots(x+a_n) p_1,$$

гдѣ p_1 — цѣлая функція.

Изъ уравненія

$$N = p^2 - q^2 R$$

получаемъ

$$(x+a)^m (x+a_1)^{m_1} \dots (x+a_n)^{m_n} = p_1^2 (x+a)^2 (x+a_1)^2 \dots \\ \dots (x+a_n)^2 - q^2 R.$$

Но R не имѣетъ квадратныхъ множителей, p и q суть полиномы первые между собою, поэтому необходимо

$$m = m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1,$$

а потому

$$R = (x+a)(x+a_1)\dots(x+a_n) R_1, \text{ или}$$

$$R = N R_1, \text{ слѣд.}$$

$$N = N^2 p_1^2 - q^2 N R_1, \text{ или}$$

$$p_1^2 N - q^2 R_1 = 1$$

Такимъ образомъ рѣшеніе вопроса поставлено въ зависимость отъ неопредѣленнаго уравненія

$$(5) \quad p_1^2 N - q^2 R_1 = 1.$$

Рѣшеніе этого уравненія и составляетъ главную трудность въ мемуарѣ Абеля. І. Бертранъ, въ своемъ сочиненіи ⁽¹⁾, доводитъ анализъ Абеля именно до этого уравненія, а затѣмъ отсылаетъ читателя къ источнику. Намъ удалось совершенно избѣжать изученія свойствъ уравненія (5) и доказать конечный критерій Абеля при помощи свойствъ полныхъ частныхъ непрерывной дроби, въ которую разлагается $\sqrt{R}$.

⁽¹⁾ Traité de calcul intégral, 1870, p. 107—110.

§ 4. Но прежде, чѣмъ приступить къ разсмотрѣнію этого вопроса, намъ приходится изложить еще одно простое преобразование, которое дѣлаетъ Абель для замѣны уравненія (5) другимъ простѣйшимъ (*).

Мы имѣли

$$\int \frac{Mdx}{N\sqrt{R}} = \int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}.$$

Имѣя въ виду, что $R = R_1 N$, $p = p_1 N$, получимъ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{p_1 \sqrt{N} + q \sqrt{R_1}}{p_1 \sqrt{N} - q \sqrt{R_1}},$$

или

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{p_1 \sqrt{N} + q \sqrt{R_1}}{p_1 \sqrt{N} - q \sqrt{R_1}} \right)^2, \text{ или}$$

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2} \log \frac{p_1^2 N + q^2 R_1 + 2p_1 q \sqrt{R}}{p_1^2 N + q^2 R_1 - 2p_1 q \sqrt{R}}$$

Полагая $p_1^2 N + q^2 R_1 = p'$, $2p_1 q = q'$,

получимъ

$$\int \frac{2\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{p' + q' \sqrt{R}}{p' - q' \sqrt{R}}.$$

Кромѣ того

$$p'^2 - q'^2 R = p_1^4 N^2 + q^4 R_1^2 + 2p_1^2 q^2 R_1 N - 4p_1^2 q^2 R_1 N = (p_1^2 N - q^2 R_1)^2.$$

Но по уравн. (5): $p_1^2 N - q^2 R_1 = 1$, слѣд.

$$p'^2 - q'^2 R = 1.$$

Отсюда видно, что для того, чтобы

$$\int \frac{2\varrho dx}{\sqrt{R}}$$

(*) Oeuvres completes, T. I. 1881. p. 121.

выражался въ логариѣмахъ въ формѣ

$$\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}},$$

необходимо, чтобы функціи p и q (цѣлыя) удовлетворяли уравненію

$$p^2 - q^2 R = 1 \quad (1). \quad (6)$$

Единицу, въ этомъ уравненіи, можно замѣнить постояннымъ количествомъ. Въ самомъ дѣлѣ равенству

$$\int \frac{2q dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$$

можно дать видъ

$$\int \frac{2q dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{cp+cq\sqrt{R}}{cp-cq\sqrt{R}},$$

а уравненіе (6) можно представить въ формѣ

$$c^2 p^2 - c^2 q^2 R = c^2.$$

Полагая теперь $c^2 p^2 = P^2$; $c^2 q^2 = Q^2$, получимъ

$$\int \frac{2q dx}{\sqrt{R}} = \log \frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}},$$

гдѣ P и Q удовлетворяютъ уравненію

$$P^2 - Q^2 R = \text{постоянному}.$$

Дальнѣйшее изысканіе критерія Абеля будетъ основано вполне на свойствахъ непрерывной дроби, въ которую разлагается $\sqrt{R}$. Къ изученію этихъ свойствъ мы и приступимъ.

§ 5. Теорема 1. Пусть $\sqrt{R}$, гдѣ R цѣлая функція x , разлагается въ бесконечную непрерывную дробь вида

(1) Значки надъ p и q , за ненадобностію, опускаемъ.

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{y_i},$$

гдѣ $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_i$ цѣлыя функціи, y_i какое нибудь изъ полныхъ частныхъ; желаю доказать, что y_i есть корень квадратнаго уравненія

$$Ay_i^2 + 2By_i + C = 0,$$

въ которомъ

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

p_i и q_i суть цѣлыя функціи, а коэффициенты уравненія A, B и C подчинены равенству

$$B^2 - AC = R.$$

Доказательство. Назовемъ

$$\alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{i-1}} = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_{i-1}} + \frac{1}{\alpha_i} = \frac{p_i}{q_i};$$

тогда

$$\sqrt{R} = \frac{p_i y_i + p_{i-1}}{q_i y_i + q_{i-1}}, \text{ или}$$

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

Отсюда видно, что

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

$$B^2 - AC = (p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1})^2 R = R$$

ч. и. т. д.

§ 6. Теорема II. Разложимъ $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{y_i},$$

гдѣ y_i есть корень уравненія

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

Если окажется, что

$$p_i^2 - q_i^2 R = a,$$

гдѣ a постоянная величина, то, при i нечетномъ, необходимо

$$a = 1.$$

Доказательство. Изъ уравненій

$$p_i^2 - q_i^2 R = a$$

$$p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^{i-1} = 1$$

имѣемъ

$$q_i q_{i-1} R - p_i p_{i-1} = \frac{p_i - a q_{i-1}}{q_i};$$

откуда видно, что

$$\frac{p_i - a q_{i-1}}{q_i}$$

есть цѣлая функція. А такъ какъ

$$\delta p_i > \delta q_i > \delta q_{i-1} \quad (1),$$

то $a q_{i-1}$ есть, очевидно, остатокъ отъ дѣленія p_i на q_i . Слѣдовательно

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{a q_{i-1}}{q_i}, \text{ или}$$

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{1}{\alpha^{-1} q_i}.$$

(1) Значкомъ δ Абель обозначаетъ степень цѣлой функціи. Oeuvres complètes, T. 1, p. 108 et suiv.

Но

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i},$$

слѣд.

$$\frac{a^{-1} q_i}{q_{i-1}} = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_i}, \text{ или}$$

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = a\alpha_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \frac{1}{a\alpha_3} + \frac{1}{a^{-1}\alpha_4} + \dots + \frac{1}{a^{\pm 1}\alpha_i}.$$

Но, по извѣстному свойству непрерывныхъ дробей ⁽¹⁾, имѣемъ

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i-1}} + \frac{1}{\alpha_{i-2}} + \dots + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\alpha_i + \frac{1}{\alpha_{i-1}} + \frac{1}{\alpha_{i-2}} + \dots + \frac{1}{\alpha_1} = a\alpha_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \frac{1}{a\alpha_3} + \frac{1}{a^{-1}\alpha_4} + \dots + \frac{1}{a^{\pm 1}\alpha_i}.$$

Равенство это влечетъ за собою рядъ новыхъ равенствъ

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= a\alpha_1 \\ \alpha_{i-1} &= a^{-1}\alpha_2 \\ \alpha_{i-2} &= a\alpha_3 \\ &\vdots \\ \alpha_1 &= a^{\pm 1}\alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (A).$$

Если i нечетное, то, полагая $i = 2k + 1$, имѣемъ

$$\alpha_{i-k} = a^{\pm 1} \alpha_{k+1}, \text{ или}$$

$$\alpha_{k+1} = a^{\pm 1} \alpha_{k+1}, \text{ или}$$

⁽¹⁾ Serret, Cours d'Algebre superieure, T. I, p. 30, 1886.

$$a^{\pm 1} = 1, \text{ слѣд.}$$

$$a = 1, \text{ ч. и. с. д.}$$

§ 7. Мы видѣли, что, въ разложеніи $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь, полное частное y_i есть одинъ изъ корней квадратнаго уравненія

$$(B) \quad ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

гдѣ $a = p_i^2 - q_i^2 R$.

Рѣшая это уравненіе, находимъ

$$y_i = - \frac{b \pm \sqrt{R}}{a}.$$

Я говорю, что вопросу удовлетворяетъ рѣшеніе вида

$$y_i = - \frac{b + \sqrt{R}}{a},$$

если $a > 0$ и рѣшеніе вида

$$y_i = - \frac{b - \sqrt{R}}{a},$$

если $a < 0$, гдѣ неравенства $a > 0$ и $a < 0$ должны имѣть мѣсто для всѣхъ значеній x , для которыхъ $R > 0$, т. е. $\sqrt{R}$ есть вещественная величина. Въ основѣ дальнѣйшихъ изслѣдованій будетъ лежать предположеніе, что $\sqrt{R}$ берется съ плюсомъ и что переменное x можетъ принимать только тѣ значенія, которыя удовлетворяютъ неравенству $R > 0$. Въ этомъ предположеніи $\sqrt{R}$ есть величина вещественная, положительная. А тогда въ разложеніи

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

всѣ неполныя частныя $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ и полное частное y_i

суть количества положительные для вышеупомянутых значений x . Но корни квадратнаго уравненія (B) § 7 имѣютъ противоположные знаки ⁽¹⁾, слѣд. для y_i надо брать положительный корень. Возможны два случая. 1) Когда i нечетное. Въ этомъ случаѣ $a = +1$. А такъ какъ абсолютная величина y_i всегда меньше $\sqrt{R}$, то необходимо взять рѣшеніе

$$y_i = -\frac{b + \sqrt{R}}{a}.$$

2) Когда i четное. Въ этомъ случаѣ возможны два предположенія: либо $a > 0$, либо $a < 0$. Если $a > 0$, то ясно, что

$$y_i = -\frac{b + \sqrt{R}}{a},$$

если $a < 0$, то необходимо взять

$$y_i = -\frac{b - \sqrt{R}}{a}.$$

Полагая, въ этомъ послѣднемъ случаѣ, $a = -a'$, имѣемъ

$$y_i = \frac{b + \sqrt{R}}{a'}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что во всѣхъ случаяхъ слѣдуетъ брать

$$y_i = \frac{\xi + \sqrt{R}}{\eta},$$

гдѣ знаменатель η всегда предполагается положительнымъ.

§ 8. Теорема III. Если въ разложеніи $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь одно изъ полныхъ частныхъ y_i будетъ корнемъ уравненія

$$ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

⁽¹⁾ Serret, Cours d'Algebre superieure, 1866, T. I, p. 55, 46.

гдѣ $a = \pm(p_i^2 - q_i^2 R)$ есть постоянная величина, то непрерывная дробь будетъ непремѣнно періодическая.

Доказательство. Имѣемъ

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}}$$

Изъ уравненія

$$ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

въ которомъ всегда можно предполагать $a > 0$, имѣемъ

$$y_i = -\frac{b + \sqrt{R}}{a}, \text{ или}$$

$$y_i = -\frac{b + \alpha + \frac{1}{y}}{a}.$$

Означая цѣлую часть дроби $-\frac{b + \alpha}{a} = \beta$, имѣемъ

$$y_i = \beta + \frac{1}{ay}.$$

Разберемъ, согласно Абелю ⁽¹⁾, два случая.

Первый случай. Число i нечетное, опредѣляемое формулою $i = 2k + 1$.

Въ этомъ случаѣ $a = 1$ (Теорема II), слѣд.

$$y_i = \beta + \frac{1}{y},$$

а потому

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}}}}}$$

⁽¹⁾ Oeuvres complètes, T. I, p. 134 et suiv. 1881.

дробь, очевидно, періодическая.

Кромѣ того, мы видѣли, что, при i нечетномъ, оказывается $a=1$, а потому

$$\alpha_{i-m} = \alpha_{m+1}.$$

Давая значку m послѣдовательныя значенія

$$m=0, 1, 2, 3, \dots k-1, k,$$

получимъ

$$\alpha_i = \alpha_1$$

$$\alpha_{i-1} = \alpha_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_{k+2} = \alpha_k.$$

На этомъ основаніи неполныя частныя, входящія въ составъ непрерывной дроби, даютъ рядъ

$$\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_k, \dots \alpha_2, \alpha_1, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

Второй случай. Число i четное, опредѣляемое формулою $i=2k$.

Имѣемъ

$$y_i = \beta + \frac{1}{ay}.$$

$$\text{Но } y = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \frac{1}{y_i}}}},$$

слѣдовательно

$$ay = a\alpha_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \frac{1}{a\alpha_3} + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i} + \frac{1}{ay_i},$$

или

$$ay = a\alpha_1 + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \frac{1}{a\alpha_3} + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i} + \frac{1}{a\beta} + \frac{1}{y},$$

слѣдовательно

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{a\alpha_1} + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \frac{1}{a\alpha_3} + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i} + \frac{1}{a\beta} + \frac{1}{\alpha_1} + \dots$$

Отсюда видно, что неполные частные непрерывной дроби даютъ рядъ

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta, a\alpha_1, a^{-1}\alpha_2, a\alpha_3, \dots, a^{-1}\alpha_i, a\beta, \alpha_1, \dots$$

Въ составъ періода входятъ частные

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta, a\alpha_1, a^{-1}\alpha_2, \dots, a^{-1}\alpha_i, a\beta,$$

счетомъ

$$2(i+1) = 2(2k+1) = 4k+2.$$

И такъ, въ обоихъ случаяхъ, $\sqrt{R}$ обращается въ безконечную періодическую непрерывную дробь, въ чемъ и заключается предложенная теорема.

§ 9. Теорема IV. Количество β предыдущей теоремы опредѣляется формулою

$$\beta = \frac{2\alpha}{a},$$

гдѣ $a = \pm(p_i^2 - q_i^2 R)$ есть постоянная величина.

Доказательство. При доказательствѣ 2-й теоремы мы нашли, что

$$q_i q_{i-1} R - p_i p_{i-1} = \alpha.$$

Но уравненіе, коему удовлетворяетъ y_i , есть

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0,$$

или

$$ay_i^2 - 2\alpha y + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0,$$

откуда

$$y_i = \frac{\alpha + \sqrt{R}}{a} = \frac{\alpha + \alpha + \frac{1}{y}}{a} = \frac{2\alpha}{a} + \frac{1}{ay},$$

откуда слѣдуетъ требуемое равенство

$$\beta = \frac{2\alpha}{a}, \text{ ч. и. с. д.}$$

§ 10. На основаніи этой теоремы имѣемъ:

1) для i нечетнаго

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\alpha_k} + \dots + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} + \dots$$

2) для i четнаго

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{2a^{-1}\alpha} + \frac{1}{a\alpha_1} + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i} + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} + \dots$$

§ 11. Теорема V. Если $\sqrt{R}$ обращается въ періодическую непрерывную дробь вида

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{y_i},$$

гдѣ $y_i = \frac{2\alpha}{a} + \frac{1}{a\alpha_1} + \dots$

a постоянная величина, то въ уравненіи

$$Ay_i^2 + By_i + C = 0,$$

слѣдовательно

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{a\alpha_1} + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \frac{1}{a\alpha_3} + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i} + \frac{1}{a\beta} + \frac{1}{\alpha_1} + \dots$$

Отсюда видно, что неполныя частныя непрерывной дроби даютъ рядъ

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta, a\alpha_1, a^{-1}\alpha_2, a\alpha_3, \dots, a^{-1}\alpha_i, a\beta, \alpha_1, \dots$$

Въ составъ періода входятъ частныя

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta, a\alpha_1, a^{-1}\alpha_2, \dots, a^{-1}\alpha_i, a\beta,$$

счетомъ

$$2(i+1) = 2(2k+1) = 4k+2.$$

И такъ, въ обоихъ случаяхъ, $\sqrt{R}$ обращается въ безконечную періодическую непрерывную дробь, въ чемъ и заключается предложенная теорема.

§ 9. Теорема IV. Количество β предыдущей теоремы опредѣляется формулою

$$\beta = \frac{2\alpha}{a},$$

гдѣ $a = \pm(p_i^2 - q_i^2 R)$ есть постоянная величина.

Доказательство. При доказательствѣ 2-й теоремы мы нашли, что

$$q_i q_{i-1} R - p_i p_{i-1} = \alpha.$$

Но уравненіе, коему удовлетворяетъ y_i , есть

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0,$$

или

$$ay_i^2 - 2\alpha y + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0,$$

откуда

$$y_i = \frac{\alpha + \sqrt{R}}{a} = \frac{\alpha + \alpha + \frac{1}{y}}{a} = \frac{2\alpha}{a} + \frac{1}{ay},$$

откуда слѣдуетъ требуемое равенство

$$\beta = \frac{2\alpha}{a}, \text{ ч. и. с. д.}$$

§ 10. На основаніи этой теоремы имѣемъ:

1) для i нечетнаго

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\alpha_k} + \dots + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} + \dots$$

2) для i четнаго

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{2a^{-1}\alpha} + \frac{1}{a\alpha_1} + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \dots + \frac{1}{a^{-1}\alpha_i} + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} + \dots$$

§ 11. Теорема V. Если $\sqrt{R}$ обращается въ періодическую непрерывную дробь вида

$$\sqrt{R} = \alpha + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{y_i},$$

гдѣ $y_i = \frac{2\alpha}{a} + \frac{1}{a\alpha_1} + \dots$

a постоянная величина, то въ уравненіи

$$Ay_i^2 + By_i + C = 0,$$

опредѣляющемъ y_i , коэффициентъ A есть постоянная величина, равная a .

Доказательство. По заданію

$$y_i = \frac{2\alpha}{a} + \frac{1}{a\alpha_1} + \frac{1}{a^{-1}\alpha_2} + \dots,$$

откуда

$$y_i = \frac{2\alpha}{a} + \frac{1}{ay},$$

откуда

$$\frac{1}{ay} = \frac{ay_i - 2\alpha}{a},$$

$$y = \frac{1}{ay_i - 2\alpha}.$$

Но y , очевидно, есть корень уравненія

$$(\alpha^2 - R)y^2 + 2\alpha y + 1 = 0,$$

слѣд. y_i удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\alpha^2 - R}{(ay_i - 2\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{ay_i - 2\alpha} + 1 = 0, \text{ или}$$

$$(ay_i - 2\alpha)^2 + 2\alpha(ay_i - 2\alpha) + \alpha^2 - R = 0,$$

или

$$a^2 y_i^2 + 2(a\alpha - 2a\alpha) y_i + \alpha^2 - R = 0, \text{ или}$$

$$ay_i^2 - 2\alpha y_i + \frac{\alpha^2 - R}{a} = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ уравненіемъ

$$Ay_i^2 + By_i + C = 0,$$

имѣемъ

$$A = a, \text{ ч. и. с. д.}$$

§ 12. Изъ всего предыдущаго вытекаетъ

Теорема Абеля VI. Если интеграль

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$$

выражается въ логариѣмахъ въ видѣ

$$\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}},$$

гдѣ p и q цѣлыя функціи x , то $\sqrt{R}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь; и обратно, если $\sqrt{R}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь, то дифференціалъ

$$\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$$

будетъ интегрироваться въ логариѣмахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$$

выражается въ логариѣмахъ въ видѣ

$$\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}},$$

то, по § 4, p и q удовлетворяютъ уравненію

$p^2 - q^2 R = \text{постоянному}$, а тогда, по теоремѣ III, § 8, $\sqrt{R}$ обращается въ періодическую непрерывную дробь.

Обратно: если $\sqrt{R}$ обращается въ періодическую непрерывную дробь, то найдутся двѣ цѣлыя функціи p и q , удовлетворяющія уравненію

$$p^2 - q^2 R = \text{постоянному},$$

а тогда, по § 1, 2, 3, 4, найдется такая цѣлая функція ϱ ,

что

$$\int \frac{\varphi dx}{\sqrt{R}}$$

выразится въ логариѣмахъ въ формѣ

$$A \log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}^{(1)}.$$

И. Долбня.

Нижній Новгородъ

26 Апрѣля

1888.

⁽¹⁾ Текстъ теоремы VI заимствованъ изъ соч. Е. Золотарева «Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ», гдѣ на стр. 104, 105 дѣлается оцѣнка критерію Абеля.

ОТЧЕТЪ

СЕКЦІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ ОБЩЕСТВА ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

П Р И

ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

ЗА ВОСЬМОЙ ГОДЪ.

(Май 1887 — Май 1888 г.).

Въ отчетномъ году секція приобрѣла 29 новыхъ членовъ, вслѣдствіе чего общее число лицъ, когда-либо записавшихся въ ея члены, возрасло до 153. Изъ этого числа должны быть исключены 9 лицъ умершихъ и двое выбывшихъ.

Администрацію секціи въ отчетномъ году составляли: предсѣдатель А. В. Васильевъ, вице-предсѣдатель А. П. Орловъ и секретарь П. С. Порѣцкій. Членами комитета состояли: Ѳ. М. Суворовъ, Д. И. Дубяго, В. В. Преображенскій, И. С. Громека, И. А. Износковъ, І. А. Имшеникъ и Н. П. Слугиновъ.

Въ отчетномъ году секція имѣла 9 засѣданій, въ которыхъ было сдѣлано 40 сообщеній 22-мя лицами.

Вотъ алфавитный списокъ лицъ, дѣлавшихъ сообщенія, съ указаніемъ названій сообщеній:

1—2) *И. С. Громека*: а) о безконечныхъ значеніяхъ интеграловъ линейныхъ дифференц. уравненій 2-го порядка и б) о вліяніи температуры на малыя колебанія воздушныхъ массъ;

3) *И. П. Долбня*—новое доказательство нѣкоторыхъ теоремъ Абеля;

4—6) *Д. И. Дубяго*: а) о современномъ состояніи нашихъ свѣдѣній касательно нѣкоторыхъ вопросовъ солнечной физики; б) отчетъ объ экспедиціи и в) о фотографіи, какъ о новомъ орудіи астрономическихъ изслѣдованій;

7—8) *А. К. Жбиковскій*: а) о механическомъ смыслѣ комплексныхъ чиселъ и б) относительно теоремы Коши;

9) *И. А. Износковъ*—о преобразованіи кратныхъ интеграловъ;

10) *Н. П. Казанкинъ*—отчетъ объ экспедиціи;

11) *Г. А. Клейбергъ*—о сглаживаніи рядовъ наблюденій;

12—13) *А. М. Ковальскій*: а) отчетъ объ экспедиціи и б) о географич. положеніи казанской обсерваторіи;

14) *Е. П. Котельникова*—біографическія свѣдѣнія о П. И. Котельниковѣ;

15) *М. И. Лопаткинъ*—о розовыхъ сумеркахъ;

16—17) *А. П. Павловъ*: а) элементарный способъ для извлеченія квадратныхъ корней и б) тоже для корней кубическихъ;

18—22) *П. С. Портьикій*: а) отчетъ объ экспедиціи, б) и в) о распознаваніи простыхъ чиселъ, г) объ одномъ сообщеніи П. В. Преображенскаго и д) по поводу диссертациі г. Цераскаго „Астрономическій фотометръ“;

23—24) *М. В. Постниковъ*: а) о кривыхъ 4-го порядка и б) о площадяхъ, ограниченныхъ такими кривыми;

25) *В. В. Преображенскій*—о сочиненіи г. Адамантова „Систематическій курсъ Ариѳметики“;

26—27) *П. В. Преображенскій*: а) объ одной формулѣ Бертрана и б) о тригонометрическихъ рядахъ особаго вида;

28—30) *П. И. Свѣшниковъ*: а) о каустическихъ кривыхъ, б) о фокусѣ призмы и в) объ изображеніяхъ въ плоскихъ зеркалахъ, покрытыхъ амальгамою;

31—32) *Н. П. Слугиновъ*: а) отчетъ объ экспедиціи и б) о количествѣ тепла, выдѣляемаго при явленіи вольтовой дуги;

33) *Ө. М. Суворовъ*—воспоминаніе о П. И. Котельниковѣ;

34—35) *Г. Н. Шебуревъ*: а) о потенциальной энергіи взаимодѣйствія двухъ магнитовъ и б) къ теоріи бифиляра;

36) *А. А. Штукенбергъ* — объ оханскомъ аэролитѣ 1887 года;

37—38) *В. П. Якимовъ*: а) объ алгебраич. задачникѣ Минина и др., и б) объ одномъ несовершенствѣ учебниковъ Алгебры;

39—40) *Н. Е. Янишевскій*: а) о фотографіяхъ солнечной короны и б) объ оханскомъ аэролитѣ 1887 года.

Кромѣ того, въ нѣкоторыхъ засѣданіяхъ секціи Н. П. Слугиновъ, Н. П. Казанкинъ, Н. Е. Янишевскій и К. В. Кельбель демонстрировали новые приборы физическаго кабинета

Въ отчетномъ году секція издала 3-й и 4-й выпуски 5-го тома и два выпуска 6-го тома, что составляетъ около 23 печатныхъ листовъ.

Библіотека секціи увеличилась въ отчетномъ году на 67 нумеровъ книгъ, брошюръ и журналовъ и простирается къ концу года до 612 нумеровъ.

На собственныя средства секціи приобрѣтены только 5 научныхъ журналовъ. Остальные 62 нумера составились отъ пожертвованій. Пожертвованія книгами поступили:

1) Отъ Императорской Академіи наукъ 4-й выпускъ 6-го тома *Mélanges math. et. astron.*;

2—15) Отъ Кіевскаго Университета — 14 нумеровъ „Универ. Извѣстій“;

16—27) отъ Дерптскаго Университета—12 брошюръ, изданныхъ въ 1887 г.;

28—29) отъ Университета Джона Гопкинса въ Балтиморѣ—American journal of Mathematics. vol. IX and. vol. X (1, 2);

30) отъ Московскаго Математ. Общества 3-й и 4-й выпуски XIII тома „Математ. Сборника“;

31—33) отъ Харьковскаго Математ. Общества три выпуска „Сообщеній“;

34—35) отъ Новороссійскаго Общества Естествоиспытателей 1-й и 2-й выпуски XII тома „Записокъ“;

36—67) отъ разныхъ лицъ 32 экз. книгъ и брошюръ.

Въ кассу секціи въ истекшемъ году поступило:

1)	Субсидія отъ Общ. Ест. на 1888 годъ.	100 р.
2)	членскіе взносы за отчетный годъ . . .	153 р.
3)	— — за прошлый годъ . . .	39 р.
4)	— — за 188 ⁵ / ₆ годъ . . .	12 р.
5)	— — за будущій годъ . . .	30 р.
6)	отъ продажи изданій секціи	39 р. 85 к.

Всего въ приходѣ 373 р. 85 к.

Въ теченіе года издержано:

1)	на типографскіе расходы	350 р. 42 к.
2)	на выписку журналовъ . . . , ...	25 р. 44 к.
3)	на покупку шкафа	25 р. —
4)	за портреты г. Котельникова	12 р. —
5)	на почтовые и мелкіе расходы	9 р. 50 к.

Всего въ расходѣ 422 р. 36 к.

Излишекъ расхода надъ приходомъ составляетъ 48 р. 51 к. Въ началѣ года въ кассѣ секціи состояло 262 р. 76 к. Слѣд. въ настоящій моментъ въ кассѣ секціи имѣется 214 р. 25 к., а именно: наличными деньгами 115 р. 25 к. и двѣ

50-рублевая облигация восточного займа, за которую уплачено 99 рублей.

В недоимку за членами числится: за 1-й год 8 руб., за 2-ой 26 руб., за 3-ий 30 руб., за 4-й 36 руб., за 5-й 66 руб., за 6-й 105 руб., за 7-й 141 руб. и за отчетный год 231 руб., а всего 643 рубля.

Председатель секции *А. Васильевъ.*

Секретарь секции *П. Портыкий.*

Печатано по определению Общества Естествоиспытателей при
Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Президентъ *А. Штукенбергъ.*

**Изданія физико-математической секціи Общества Есте-
ствовиспытателей при Казанскомъ университетѣ.**

- 1) Собраніе протоколовъ, томъ 1-й, цѣна 2 р.
 - 2) Тоже, томъ 2-й; цѣна: съ кабинетнымъ портретомъ Н. И. Лобачевского 2 р., безъ портрета 1 р. 75 к.
 - 3) Тоже, томъ 3-й; цѣна: съ кабинетнымъ портретомъ М. А. Ковальскаго 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
 - 4) Тоже, томъ 4-й; цѣна 1 р. 50 к.
 - 5) Тоже, томъ 5-й; цѣна: съ кабинетн. портретомъ П. И. Котельникова 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
 - 6) Тоже, томъ 6-й; цѣна 1 р. 50 к.
 - 7) Брошюра «М. А. Ковальскій» съ кабинетн. портретомъ; цѣна 60 к.
 - 8) Брошюра «П. И. Котельниковъ»; цѣна: съ кабинетн. портретомъ 50 к., безъ портрета 30 к.
-